Schulinternes Curriculum der Jahrgangsstufe Q1 am städtischen Gymnasium Delbrück im Fach Mathematik für den Grundkurs

Lehrmittel	
Unterrichtsvorhaben	**I: Optimierungsprobleme (GK-A1)**
Zeitraum	**Ca. 13 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Funktionen und Analysis (A)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (1) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese, (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen, (4) erläutern den Begriff der Umkehrfunktion am Beispiel der Wurzelfunktion unter	***Zur Umsetzung*** Gestartet wird mit Optimierungsproblemen mit ganzrationalen Funktionen. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei

Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs, (5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion, der Sinus- und der Kosinusfunktion sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ und wenden die Produktregel an. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … – Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, – Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, – Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern, Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation, Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,	Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt. An mindestens einem Problem im Sachzusammenhang entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen, die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$. Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden. Anschließend wird als Exkurs exemplarisch die Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs als Umkehrfunktion betrachtet.

Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen, Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung, Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung, Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten, Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch), Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen), Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind, Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege, Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.	

Unterrichtsvorhaben	**II: Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (inklusive LGS) (GK-A2)**
Zeitraum	**Ca. 15 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Funktionen und Analysis (A)** **Analytische Geometire und Lineare Algebra (G)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$ • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“) • Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra)

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** ***Funktionen und Analysis (A):*** (2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, der Sinusfunktion, der Kosinusfunktion, der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen, (3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben, (7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung.	***Zur Umsetzung*** Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrien, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad

Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G): (7) erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, (8) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese, Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus, Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen, Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch, Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … – Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, – zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen, – Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge, Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,	der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen finden. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext *Bildung für nachhaltige Entwicklung* in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden. Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, algorithmische Lösungsverfahren (z.B. den Gauß-Algorithmus) zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen.

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen, Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern, Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren, Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege, Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang, Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität, Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten.	Anknüpfend an die Einführungsphase werden in innermathematischen Situationen und in unterschiedlichen Kontexten (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) ganzrationale Funktionen mit Parametern aufgestellt und mithilfe eines MMS untersucht. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt. ***Zur Vertiefung:*** • Auch die Transformation der Sinus- und Kosinusfunktion kann wiederholend zur Modellierung eingesetzt werden. ***Zur Vernetzung:*** • In diesem Unterrichtsvorhaben werden algorithmische Lösungsverfahrens für lineare Gleichungssysteme schwerpunktmäßig behandelt. Lineare Gleichungssysteme werden bei den Unterrichtsvorhaben der analytischen Geometrie ebenfalls benötigt, dort sollten aber algorithmische Lösungsverfahren keinen Schwerpunkt mehr bilden.

	Verschiedene Arten von Lösungsmengen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten wurden bereits in der EF bei den Lagebeziehungen von Geraden aufgegriffen. ***Materialhinweis:*** • Material „Meeresspiegelanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ im Lehrplannavigator (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)

Unterrichtsvorhaben	**III: Von der Änderungsrate zum Bestand (GK-A3)**
Zeitraum	**Ca. 8 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Funktionen und Analysis (A)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe, (12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung, (13) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion, (14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus, Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und	***Zur Umsetzung*** Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben E-A3. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und vergleichen eigenständig

Präsentieren sowie zum Erkunden, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern), Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen, Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele, Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind, Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte, Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung, Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität, Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.	unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsumme, Ober- oder Untersumme) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert. Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend

	eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen, die zur Definition des Integrals führen. ***Hinweis:*** • Bei der Behandlung der Produktsummen soll auch die Notation mithilfe des Summenzeichens eingeführt und geübt werden. ***Materialhinweis:*** Impulse für das Stationenlernen können den Sinus-Materialien (2008) in der Materialdatenbank entnommen werden: https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=448&idcat=378&lang=9&client=12&matId=2033

Unterrichtsvorhaben	**IV: Der Hauptsatz der Differential- und Integralgleichung und seine Anwendungen (GK-A4)**
Zeitraum	**Ca. 12 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Funktionen und Analysis (A)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung, (15) erläutern geometrisch-anschaulich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wenden ihn an, (16) nutzen vorgegebene Stammfunktionen und bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, (17) nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen, (18) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion, (19) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt, Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses	***Zur Umsetzung*** Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird durch geometrisch-anschauliche Überlegungen begründet und damit der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufgestellt. Die Bedeutung des Hauptsatzes und seine Anwendung werden in verschiedenen Kontexten vertieft. Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen von Stammfunktionen

durch, Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus, Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … – Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern, Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen, Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation, Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise, Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können, Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren, Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,	werden für ganzrationale Funktionen von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbständig erarbeitet. Die gewonnenen Erkenntnisse werden auf weitere innermathematische bzw. anwendungsorientierte Situationen übertragen, die auch Flächen zwischen Funktionsgraphen umfassen. Bei geeigneten Problemstellungen werden die Intervalladditivität und Linearität des Integrals thematisiert. Geeignete Problemstellungen werden in diesem Unterrichtsvorhaben auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Kom-(11)	greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.	

Unterrichtsvorhaben	V : Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (GK-G1)
Zeitraum	Ca. 12 Unterrichtsstunden
Inhaltsfelder	**Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)** **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Vektoroperation: Skalarprodukt

Kompetenzen und	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es, (9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven, Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen, Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen, Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur	***Zur Umsetzung*** Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist jedoch die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dieses wird am Beispiel der Kräftezerlegung (z.B. Zerlegung in vertikale und horizontale Komponenten beim Schlittenziehen) veranschaulicht.

Problemlösung aus, Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern, Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise, Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können, Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.	Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht. Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produkts von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. Division durch einen Vektor) und vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen gestellt.

Unterrichtsvorhaben	**VI: Ebenen in Koordinaten- und Parameterform (GK-G2)**
Zeitraum	**Ca. 12 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor • Schnittpunkte: Geraden und Ebenen • Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es, (2) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar, (3) verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor), (4) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen, (8) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,	***Zur Umsetzung*** Die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ wird anknüpfend an Geradengleichungen $a \cdot x + b \cdot y = d$ in der Ebene durch Erweitern um eine Variable eingeführt. Zur Erkundung soll eine Visualisierung mit einem MMS dienen, bei der die Achsenabschnitte $a_i = d/n_i$ (für $n_i \neq 0$) ins Spiel kommen, die in der Achsenabschnittsform $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$ auftreten. Diese Form bietet den Vorteil, eindeutig zu sein, und erlaubt es, die Lage der Ebene im Koordinatensystem zeichnerisch darzustellen. Die Schnittpunktberechnung

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum… – Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, – Darstellen von geometrischen Situationen im Raum, Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen, Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern), Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, Arg (5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch), Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren, Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind, Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.	(Durchstoßpunkt) zwischen Geraden und Ebenen ist mit der Koordinatenform besonders einfach, wenn ein allgemeiner Punkt der Gerade (parametrisierte Punktmenge) in die Koordinatenform eingesetzt wird. Die Achsenabschnittsberechnung ordnet sich dabei als Spezialfall ein. Auch Spurgeraden in den Hauptebenen werden mit dem Einsetzungsprinzip ermittelt. Die Notation mithilfe des in GK-G1 eingeführten Skalarproduktes $\vec{\mathrm{n}} \cdot \vec{x} = d$ führt zur Deutung von $\vec{n}$ als Normalenvektor, der senkrecht auf der Ebene steht. Der Einfluss von d, mit dem sich die Ebene parallel verschieben lässt, wird erkundet. Um eine Gleichung einer Ebene aus drei Punkten aufzustellen, soll dies dem Prinzip einer Steckbriefaufgabe folgend (vgl. GK-A2) mit einem 3x3-Gleichungssystem durch Einsetzen der drei Punkte in die Gleichung $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ erfolgen, wobei *d* als Parameter im MMS mitläuft oder $d = 1$ (in Sonderfällen $d = 0$) gesetzt werden kann. Als Kontext für die anschließend zu thematisierende Parameterform einer Ebene dient z.B. eine Dachkonstruktion

	mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Der Übergang zur Koordinatenform erfolgt als Alternative zum „Steckbriefverfahren" auch durch die Bestimmung eines Normalenvektors mithilfe eines unterbestimmten 2x3-Gleichungssystems. Ein explizites Arbeiten mit der Normalenform soll aber nur im Rahmen einer Differenzierung erfolgen. Der umgekehrte Übergang von der Koordinatenform zur Parameterform kann über drei Punkte (z.B. die Achsenabschnitte) bewerkstelligt werden, oder indem zwei (zu $\vec{n}$ orthogonale) Spannvektoren der Ebene aus Gleichungen des Typs $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ gewonnen werden. ***Zur Vernetzung:*** • Ein systematisches Verfahren, lineare Gleichungssysteme auch hilfsmittelfrei in einfachen Fällen zu lösen, wurde bereits im

	Unterrichtsvorhaben GK-A2 eingeführt. Um hier Möglichkeiten des weiteren Übens und Wiederholens zu schaffen, können Durchstoßpunkte alternativ mit Ebenen in Parameterform in einfachen Fällen berechnet werden. Des Weiteren führt die Punktprobe bei Ebenen in Parameterform auf ein 3x2-Gleichungssystem. ***Zur Vertiefung:*** • Ein Normalenvektor kann mit einem MMS auch mithilfe des Vektorprodukts berechnet werden.

Unterrichtsvorhaben	VII: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (GK-S1)
Zeitraum	Ca. 17 Unterrichtsstunden
Inhaltsfelder	**Stochastik (S)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln • Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung • Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzen und	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge, (2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen, (3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge, (5) bestimmen das Gegenereignis $\overline{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, (6) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten, (7) prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,	***Zur Umsetzung*** Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die

(8) lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten, (9) erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen, (10) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt, Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … - Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation, Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund	Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet. Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet. Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf

der Fragestellung, Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang, Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus	stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten, wie Zufallsantworten bei sensitiven Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test). Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des

	hilfsmittelfreien Rechnens verwendet. ***Hinweis:*** Bei der Auswahl der Kontexte für Modellierungen und Aufgabenstellungen sollten im gesamten Unterrichtsvorhaben die Möglichkeiten unterschiedlicher Lebensweisen, Identitäten und Orientierungen sensibel berücksichtigt werden. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.
Summe Grundkurs Q1: 120 Stunden ***Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 84 Stunden***	