Schulinternes Curriculum der Jahrgangsstufe Q1 am städtischen Gymnasium Delbrück im Fach Mathematik für den Leistungskurs

Lehrmittel	
Unterrichtsvorhaben	**I: Optimierungsprobleme ohne und mit Parametern (LK-A1)**
Zeitraum	**Ca. 18 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Funktionen und Analysis (A)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Funktionen: ganzrationale Funktionen Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (1) lösen biquadratische Gleichungen auch ohne Hilfsmittel, (2) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese, (3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von	***Zur Umsetzung*** Zur Reaktivierung der Vorkenntnisse der Differentialrechnung werden Funktionen vierten Grades untersucht. Dies umfasst insbesondere das hilfsmittelfreie Lösen von biquadratischen Gleichungen. Anschließend werden zunächst Optimierungsprobleme mit

Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen, (5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen, (6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an, (7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … – Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, – zielgerichteten Variieren von Parameter von Funktionen, – Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern, Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,	ganzrationalen Funktionen ohne Parameter betrachtet. Als Einstiegsproblem hat sich z.B. die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, bewährt. Das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege entwickeln. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt. An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen von Potenzfunktionen mit

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation, Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen, Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung, Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung, Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten, Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch), Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen), Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind, Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege, Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.	rationalen Exponenten (noch ohne die Produkt- oder Kettenregel). Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden, ohne dass Ableitungen hilfsmittelfrei gebildet werden müssen (z.B. „Zylinder in einer Kugel“). Anschließend werden Optimierungsprobleme bei Funktionen mit Parametern betrachtet. Hier kann z.B. auch das Problem der offenen Schachtel wieder aufgegriffen werden, indem nicht von einem Papier mit festen Maßen ausgegangen wird, sondern nur ein Seitenverhältnis der Papierseiten vorgegeben wird oder die Länge einer Seite offenbleibt, sodass bei der Zielfunktion eine Parameterabhängigkeit entsteht. Mit vorgegebenen ganzrationalen Funktionen mit Parametern (Funktionsscharen) werden anknüpfend innermathematische Situationen (Funktionsscharen) und anwendungsbezogene Kontexte mit Parametern (z.B. Brücken, Gebäude, Flugbahnen) untersucht, bei denen Extrempunkte eine Rolle spielen. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren

	von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.

Unterrichtsvorhaben	**II: Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (inklusive LGS) (LK-A2)**
Zeitraum	**Ca. 20 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Funktionen und Analysis (A)** **Analytische Geometire und Lineare Algebra (G)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$ • Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Kettenregel, Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“) • Lineare Gleichungssysteme (Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra)

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** ***Funktionen und Analysis (A):*** (3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen, (4) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben, (5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren	***Zur Umsetzung*** Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrie, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Gelegenheit, über Grundannahmen

Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen. ***Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G):*** (6) erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, (7) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind, (8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese, Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus, Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen, Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch, Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … – Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, – zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen, – Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge, Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine	der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext *Bildung für nachhaltige Entwicklung* in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden. Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, ein MMS zunächst als Blackbox zum Lösen von linearen Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen zum Zweck der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, algorithmische Lösungsverfahren (z.B. den Gauß-Algorithmus) zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel durchzuführen.

konkrete Fragestellung, Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen, Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern, Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren, Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege, Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang, Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität, Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten.	Über freie Parameter (in Lösungen aus unterbestimmten Gleichungssystemen) können Funktionsscharen erzeugt und damit ein Rückbezug zum Unterrichtsvorhaben LK-A1 hergestellt werden. Anschließend werden mithilfe von Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechenden Kosinusfunktionen periodische Situationen (z.B. Sonnenscheindauer im Jahresverlauf) wiederholend modelliert. Dabei sollen die einzelnen Parameter mit und ohne MMS bestimmt werden. ***Hinweise:*** • Zur Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, sie selbstständig zur Spline-Interpolation forschen und referieren zu lassen. ***Zur Vernetzung:*** • In diesem Unterrichtsvorhaben werden algorithmische Lösungsverfahren und mögliche Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme (leere Menge, eindeutige Lösung oder unendlich viele Lösungen) schwerpunktmäßig

	behandelt. Lineare Gleichungssysteme werden bei den Unterrichtsvorhaben der analytischen Geometrie erneut benötigt, dort sollten aber algorithmische Lösungsverfahren keinen Schwerpunkt mehr bilden. Verschiedene Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme werden bei den Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen wieder aufgegriffen und geometrisch gedeutet (leere Menge, Punkt, Gerade, Ebene). ***Materialhinweis:*** • Material „Meeresspiegelanstieg I – Modellierung mit ganzrationalen Funktionen“ im Lehrplannavigator (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)

Unterrichtsvorhaben	**III: Von der Änderungsrate zum Bestand (LK-A3)**
Zeitraum	**Ca. 10 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Funktionen und Analysis (A)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (14) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe, (15) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung, (16) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion, (17) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt, Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus, Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,	***Zur Umsetzung*** Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten im Unterrichtsvorhaben E-A3. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Daneben wird die Rekonstruktion einer Größe (z.B. physikalische Arbeit) thematisiert, bei der es sich nicht um die Rekonstruktion eines Bestandes handelt. Der Einstieg sollte über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von

Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern), Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen, Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele, Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind, Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte, Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung, Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität, Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.	einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsummen) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert. Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit werden immer genauere Flächenabschätzungen

	vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit dem Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Aus den übereinstimmenden Grenzwerten von Ober- und Untersummen ergibt sich die Definition des Integrals. ***Hinweise:*** • Bei der Behandlung der Produktsummen soll auch die Notation mithilfe des Summenzeichens eingeführt und geübt werden. **Materialhinweis:** • Impulse für das Stationenlernen können den Sinus-Materialien (2008) in der Materialdatenbank entnommen werden: https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=448&idcat=378&lang=9&client=12&matId=2033

Unterrichtsvorhaben	IV: Herleitung und Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralgleichung und seine Anwendungen (LK-A4)
Zeitraum	**Ca. 18 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Funktionen und Analysis (A)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzen und	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung, (15) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung, (18) begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs und wenden den Hauptsatz an, (19) bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, nutzen vorgegebene Stammfunktionen und verwenden die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \mapsto \frac{1}{x}$, (20) nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen, (21) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion, (22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen.	***Zur Umsetzung*** Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird anschaulich, kontextgebunden und numerisch begründet. Um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch tiefergehend zu begründen, wird der absolute Zuwachs $I_a(x+h) - I_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt, Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus, Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … – Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern, Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen, Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation, Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,	Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. In diesem Rahmen werden auch die Intervall-additivität und Linearität des Integrals formal gefasst. Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen für Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbständig erarbeitet. Dabei finden sie auch heraus, dass dies nicht in jedem Fall möglich ist und es Funktionen wie $f(x)=\frac{1}{x}$ gibt, für deren Stammfunktionen noch kein Funktionsterm zur Verfügung steht. Die gewonnenen Erkenntnisse werden für die Berechnung von Flächen zwischen Funktionsgraphen genutzt und auf weitere zunehmend komplexe innermathematische und anwendungsorientierte Situationen übertragen. Geeignete Problemstellungen werden auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können, Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren, Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang, Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.	

Unterrichtsvorhaben	**V : Von Wachstumsprozessen zur natürlichen Exponentialfunktion (LK-A5)**
Zeitraum	**Ca. 15 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Funktionen und Analysis (A)** **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen, (5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen, (10) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion ($f' = f$), (11) verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung.	***Zur Umsetzung*** In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des

Prozessbezogene Kompetenzerwartungen Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus, Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen, Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch, Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … – zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen, – Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, – Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern, Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge, Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen, Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen, Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern), Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen, Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,	Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS kann das Verhalten des Differenzenquotienten für immer kleinere h betrachtet werden. Durch Variation der Stelle der Ableitung entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand (Differentialgleichung). Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden. Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse und Wachstumsprozesse mit Parametern (Funktionsscharen) betrachtet. Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch,

Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung, Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen, Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten, Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.	exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und die Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen. ***Materialhinweis:*** • Material „Meeresspiegelanstieg II – Modellierung mit Exponentialfunktionen“ im Lehrplannavigator (https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigator-s-ii/gymnasiale-oberstufe-neue-klp/mathematik/hinweise-und-materialien/index.html)

Unterrichtsvorhaben	**VI : Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (LK-G1)**
Zeitraum	**Ca. 7 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)** **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Vektoroperation: Skalarprodukt

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (2) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es, (12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** (2) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es, (12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse. Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven, Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von	***Zur Umsetzung*** Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung zunächst eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont, der später zum Verständnis der Abstandsmessung zwischen Punkten und Ebenen genutzt werden kann. Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS

Problemstellungen, Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen, Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern, Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise, Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können, Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.	führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Am Beispiel der physikalischen Arbeit wird das geometrische Verständnis des Skalarprodukts veranschaulicht. Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht. Die besonderen formalen Eigenschaften des Skalarprodukts sowie die dafür gültigen Rechengesetze werden im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. keine Division durch einen Vektor, kein Satz vom Nullprodukt) sowie vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen thematisiert. ***Zur Vertiefung:*** • Im Rahmen eines arbeitsteiligen Vorgehens kann ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt dahinterliegende elementargeometrische Sätze transparent machen wie z.B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen $(\vec{a} +$

	$\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ und $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ für die Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eines Parallelogramms. Ein ähnliches Vorgehen ist beim Beweis des Satzes des Thales möglich. • Im Sinne der Wissenschaftspropädeutik ist neben einem Einblick in die Möglichkeit einer axiomatischen Festlegung eines Skalarproduktes durch seine algebraischen Eigenschaften wichtig, dass durch ein Skalarprodukt zugleich Längen- als auch Winkelmessung in einem Vektorraum ermöglicht werden.

Unterrichtsvorhaben	**VII: Ebenen in Normalenform und ihre Schnittmengen (LK-G2)**
Zeitraum	**Ca. 10 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform • Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen • Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (2) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es, (3) stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum, (4) untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen, (5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen, (8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen, (9) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten, (10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,	***Zur Umsetzung*** Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens wird folgender anspruchsvoller, an das Unterrichtsvorhaben LK-G1 anknüpfender Weg vorgeschlagen: Betrachtet wird die als Punkt-Normalenform bekannte Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen wie $\vec{a} = \vec{0}$ wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet. Die Schnittmenge zweier Ebenen wird durch Lösung eines linearen 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Dabei müssen die Lernenden eine nicht leere Lösungsmenge

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum… – Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, – Darstellen von geometrischen Situationen im Raum, Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen, Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern), Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen, Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung, Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, Arg (5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind, Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege.	selbständig parametrisieren und als Schnittgerade identifizieren. Zur Klärung der Parallelität von Geraden und Ebenen oder Ebenen untereinander werden Normalenvektoren herangezogen. Über die Normalenvektoren wird die Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren auch auf Ebenen übertragen. Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform[1] als Sonderformen der Normalenform) werden in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse. Die Hesse-Normalenform[1] erlaubt es, Abstände eines Punktes von der Ebene sowie Abstände zwischen parallelen Ebenen direkt abzulesen. Dabei wird eine Verknüpfung zur Grundvorstellung der Projektion (LK-G1) hergestellt. Verfahrenstechnisch macht es keinen

[1] Die Hesse-Normalenform gehört nicht zur Obligatorik des KLP und ist damit nicht verpflichtend. Aus didaktischen Gründen wurde sie für diesen Zugang in diesem beispielhaften Plan vertiefend integriert.

	Unterschied, ob es sich nun um den Abstand eines Punktes, einer parallelen Geraden oder einer parallelen Ebene von einer Ebene handelt. Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Die Achsenabschnittsberechnung ist dabei nur ein Spezialfall der besonders einfachen Schnittmengenberechnung zwischen Geraden und Ebenen (Durchstoßpunkt) in Koordinatenform. Einen verständnisorientierten Zugang zur Abstandsberechnung zwischen einem Punkt und einer Ebene bietet das Lotfußpunktverfahren, das auch auf weitere Abstandsprobleme (vgl. LK-G4) übertragen werden kann. ***Zur Vernetzung:*** • Die Gleichungen eines linearen 2x3- oder 3x3-Gleichungssystem (LK-A2) können als Koordinatengleichungen interpretiert werden, so dass die Lösungsmenge des LGS als Schnittmenge von Ebenen geometrisch gedeutet werden kann. Ihre Dimension lässt sich aus der Lagebeziehung der Ebenen erkennen. Dabei wird deutlich, wie weit die Normalenvektoren die

	Lagebeziehungen zwischen 2 oder 3 Ebenen bestimmen.

Unterrichtsvorhaben	**VIII: Parametisierung von Ebenen (LK-G3)**
Zeitraum	**Ca. 8 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenform • Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (1) stellen Ebenen, Parallelogramme und Dreiecke in Parameterform dar, (3) stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum, (4) untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen, (5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen, (7) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind, (8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese, Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,	***Zur Umsetzung*** Als weitere Darstellungsform wird nun die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt. Als Einstiegskontext dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs der Parameter werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben. Die Berechnung von Schnittmengen zwischen Ebenen und Geraden ist sowohl über ein 3x3-LGS möglich, wenn beide in Parameterform vorliegen, als

Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum… – Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, – Darstellen von geometrischen Situationen im Raum, Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen, Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch), Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren, Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.	auch durch Einsetzen einer Geradengleichung in eine Koordinatengleichung. Für einen Wechsel zwischen Parameterform und Koordinatenform einer Ebene wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Die Entscheidung über Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden kann direkt mit der Schnittmengenberechnung verknüpft werden. ***Zur Vernetzung:*** • Der Unterricht wird durch den Einsatz eines MMS bei der Lösung linearer Gleichungssysteme entlastet. Es ist jedoch sinnvoll, numerisch einfache Fälle auch hilfsmittelfrei zu bearbeiten, um die bereits im Unterrichtsvorhaben LK-A2 erworbenen Kompetenzen zu reaktivieren und zu festigen. ***Zur Vertiefung:*** • Die Bestimmung eines Normalenvektors mit Hilfe des Vektorproduktes ist nicht primär wegen der technischen Einfachheit gewinnbringend, sondern weil die Entwicklung einer tragfähigen geometrischen Vorstellung des

	Vektorproduktes sowie eine Beschreibung seiner algebraischen Eigenschaften den im Unterrichtsvorhaben LK-G1 für das Skalarprodukt beschrittenen Weg weiterverfolgt und auch eine hohe Relevanz für den Physikunterricht besitzt. Vertiefend kann das Vektorprodukt für die Flächenberechnung bei Parallelogrammen und Dreiecken sowie für die Volumenberechnung beim Spatprodukt eingesetzt werden. • Die Berechnung von Schnittmengen zwischen zwei Ebenen kann besonders einfach mit einer Gleichung erfolgen, wenn eine Ebene in Koordinaten- und eine in Parameterform gegeben ist. • Vertiefend kann die Parallelität zwischen einer Ebene und einer Geraden durch die lineare Abhängigkeit des Richtungsvektors der Geraden von den Spanvektoren der Ebene beschrieben werden (Komplanarität).

Unterrichtsvorhaben	**IX: Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (LK-G4)**
Zeitraum	**Ca. 6 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** **(**10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen, (12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen, Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,	***Zur Umsetzung*** Die Abstandsbestimmung erweitert sowohl die Beschreibung von Lagebeziehungen als auch die Schnittmengenproblematik. Bei Ebenen wurden Abstandsbestimmungen bereits im Unterrichtsvorhaben LK-G2 mit der Hesse-Normalenform behandelt. Am Beispiel des Vorbeifluges eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen, insbesondere ein Lösungsweg mit den Mitteln der Analysis. Die Mittel der

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.	Analysis lassen sich auch nutzen, um im Anschluss den minimalen Abstand zweier Flugobjekte mithilfe eines MMS zu bestimmen. Im Unterschied dazu knüpft die Abstandsberechnung von Flugbahnen an die Untersuchung von Lagebeziehungen von Geraden aus dem Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Ihre Berechnung kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten - insbesondere unter Einschluss von Hilfsebenen - genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nicht. ***Zur Vernetzung:*** • Das Unterrichtsvorhaben knüpft sehr eng an das Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Insbesondere ist eine integrierende Wiederholung der Lagebeziehungen von Geraden und ihrer Bestimmung vorzusehen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung (E-A4) bietet sich durchgehend an und sollte unter der Maxime einer möglichst großen Lösungsvielfalt und als Chance zur Binnendifferenzierung nicht fehlen.

Unterrichtsvorhaben	**X: Alles nur Zufall? – Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (LK-S1)**
Zeitraum	**Ca. 18 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Stochastik (S)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln • Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung • Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge, (2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen, (3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge, (5) bestimmen das Gegenereignis $\overline{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, (7) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten, (8) prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,	***Zur Umsetzung*** Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber

(9) lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten, (10) erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen, (11) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt, Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum … - Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation, Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,	unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet. Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS (Nutzung des Zufallsgenerators) – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet. Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter

Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang, Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus.	Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten wie Zufallsantworten bei sensitiven Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test). Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. Auch hierbei

	wird ein MMS zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Histogramme) und zur Entlastung des hilfsmittelfreien Rechnens verwendet. **Hinweis:** Bei der Auswahl der Kontexte für Modellierungen und Aufgabenstellungen sollten im gesamten Unterrichtsvorhaben die Möglichkeiten unterschiedlicher Lebensweisen, Identitäten und Orientierungen sensibel berücksichtigt werden. Das bedeutet insbesondere, dass die Merkmale „weiblich“ und „männlich“ nicht als komplementär betrachtet werden sollten, da es neben den Geschlechtern „weiblich“ und „männlich“ auch das Geschlecht „divers“ sowie die Möglichkeit gibt, den Geschlechtseintrag im Personenstandsregister offenzulassen. Die Komplementärmenge von „weiblich“ sollte daher „nicht weiblich“ sein.

Unterrichtsvorhaben	**XI : Treffer oder nicht? – Vom Urnenmodell zur Binominalverteilung (LK-S2)**
Zeitraum	**Ca. 12 Unterrichtsstunden**
Inhaltsfelder	**Stochastik (S)** **Inhaltliche Schwerpunkte**: • Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln • Binomialverteilung: Binomialkoeffizient, Kenngrößen, Histogramme, σ-Regeln

Kompetenzen und	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Die Schülerinnen und Schüler **Übergeordnete Kompetenzerwartungen** (4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, (6) erklären die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten und berechnen diesen in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel, (7) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten, (12) begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können. **Prozessbezogene Kompetenzerwartungen** Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch,	***Zur Umsetzung*** Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg“ oder „Misserfolg“) wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation

Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen, Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen, Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung, Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege, Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.	voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen. Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Ausgehend von der kombinatorischen Bedeutung wird der Binomialkoeffizient im Folgenden in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel berechnet. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt. Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet

	(„Von der Verteilung zur Realsituation“). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich. ***Zur Vernetzung:*** • Das Summenzeichen wird als Schreibweise bei den kumulierten Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung wieder aufgegriffen.
Summe Leistungskurs Q1: 200 Stunden ***Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 142 Stunden***	